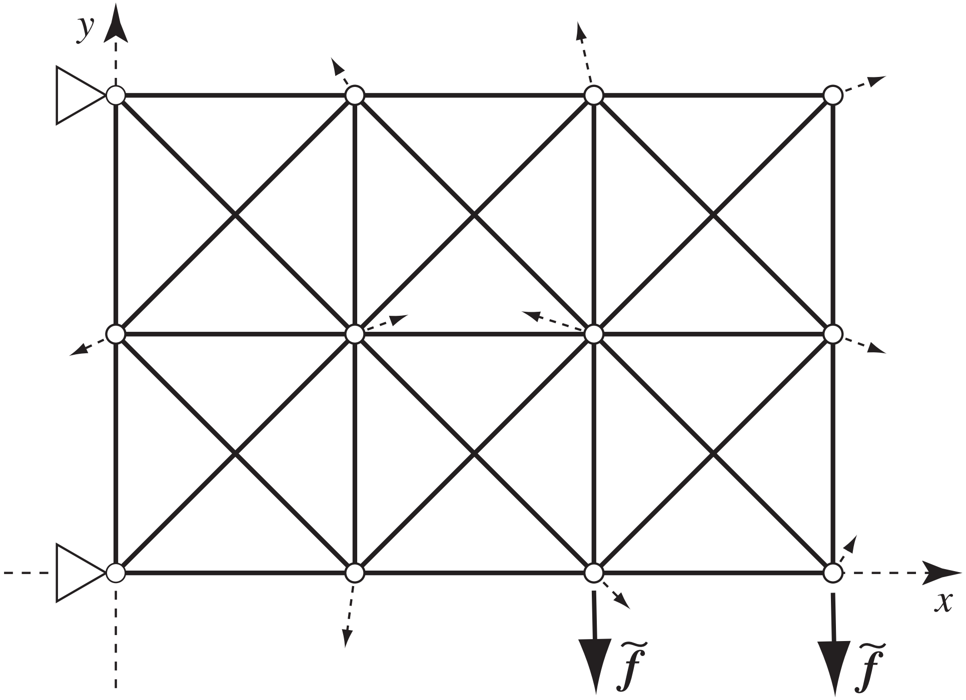
不確定性を有する構造物とロバスト性

寒野 善博

京都大学大学院 都市環境工学専攻

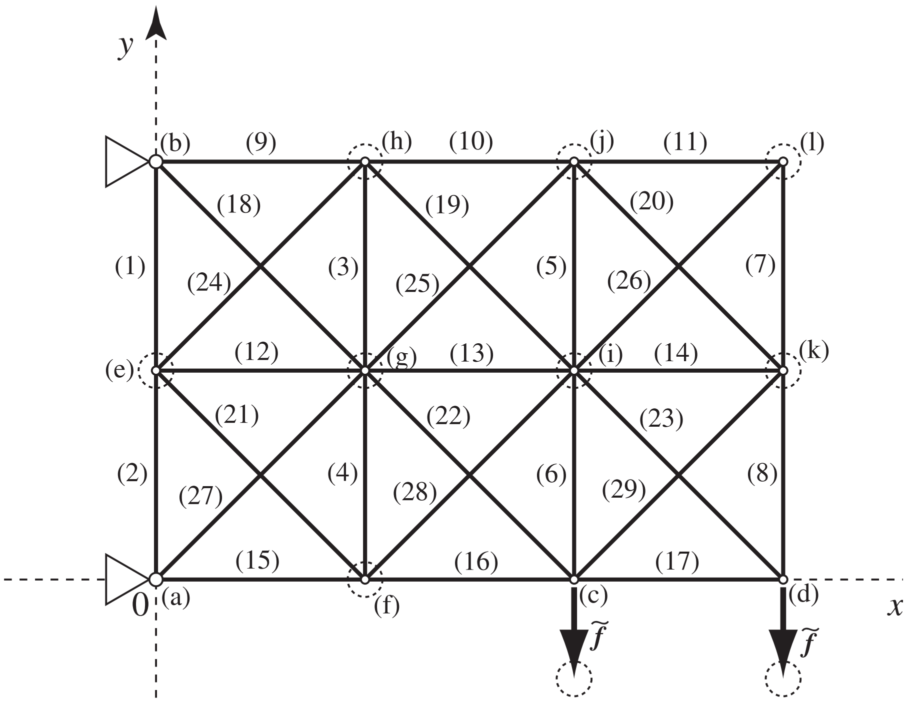
トラスの不確定性

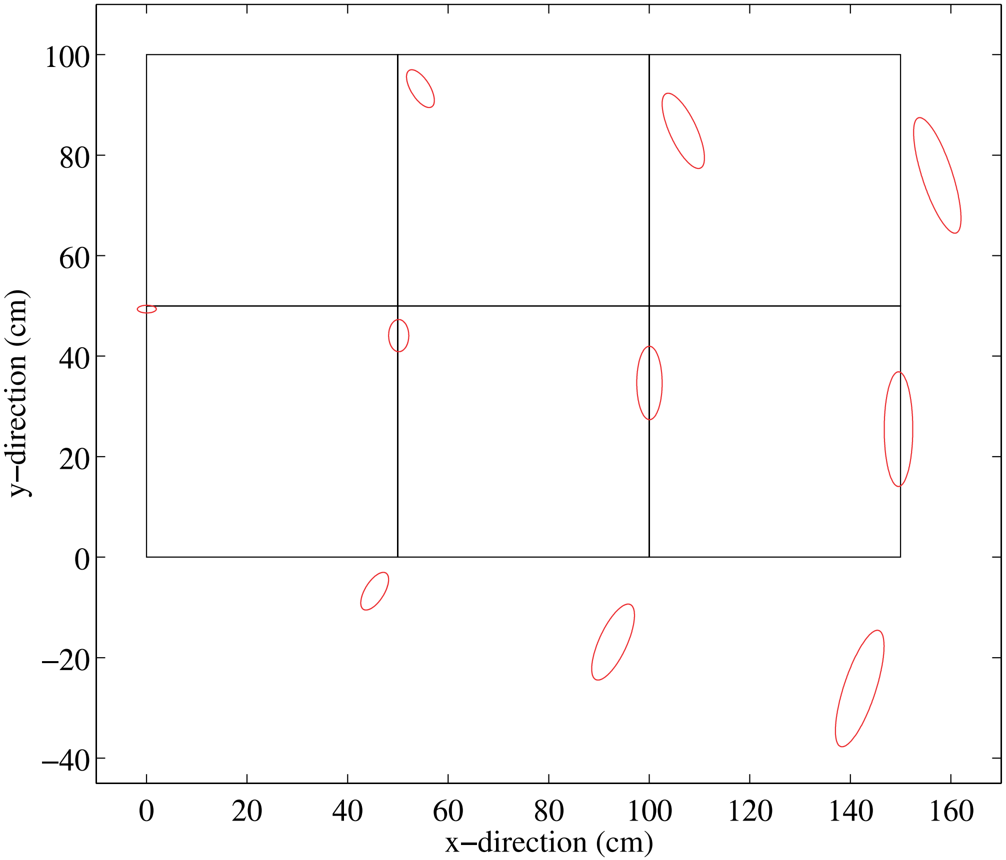
- **モデル化 (現実の構造物/数理モデル)**
- input: **荷重** & **剛性行列**
- output: **変位**, **応力**, **座屈荷重**,...
- **不確定な** input
  - **荷重の仮定**
  - **剛性のばらつき**
  - **節点位置の不整**
- output?



トラスの不確定性

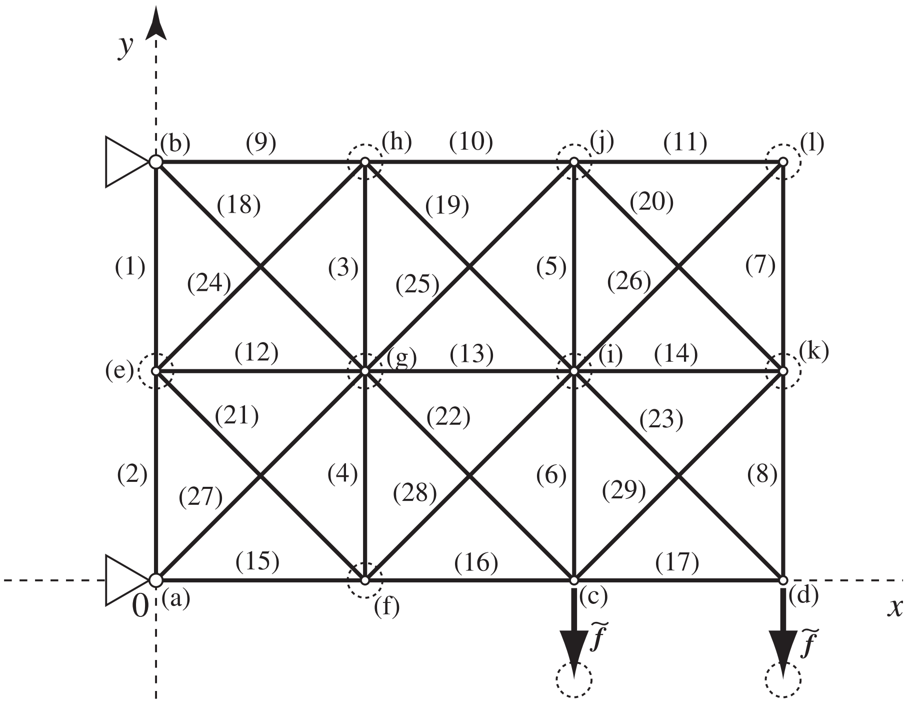
- 部材剛性, 外力が不確定
- 節点変位の範囲

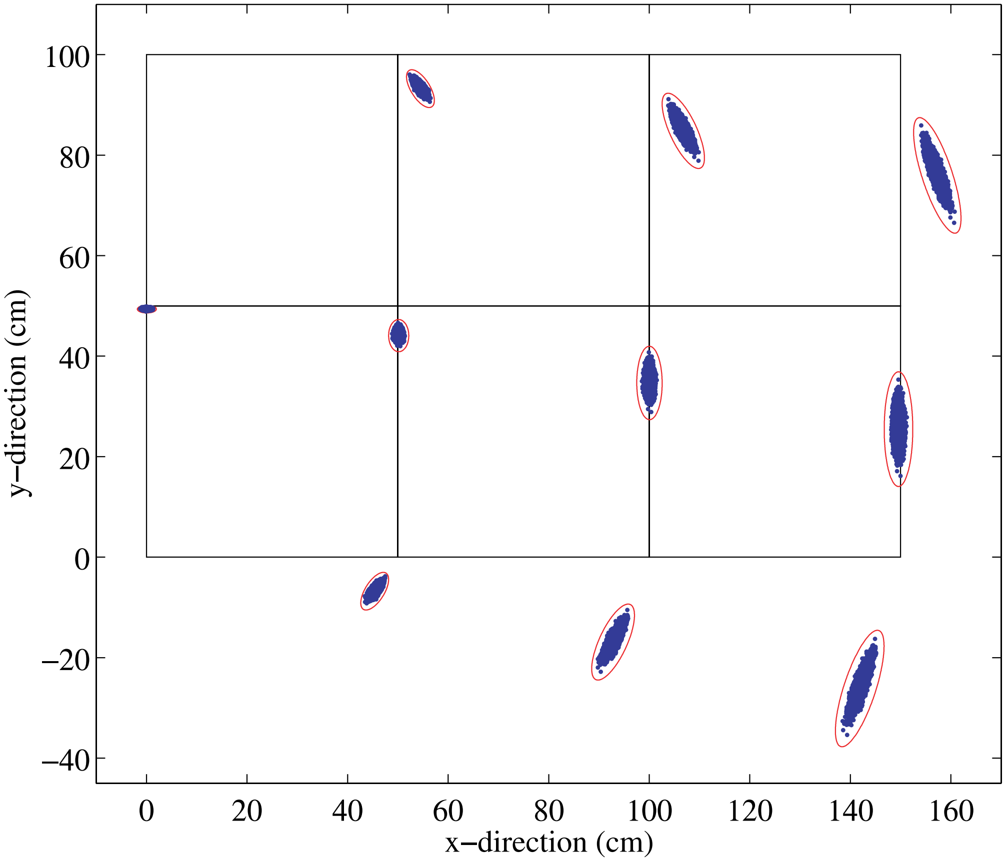




トラスの不確定性

- 部材剛性, 外力が不確定
- 節点変位の範囲



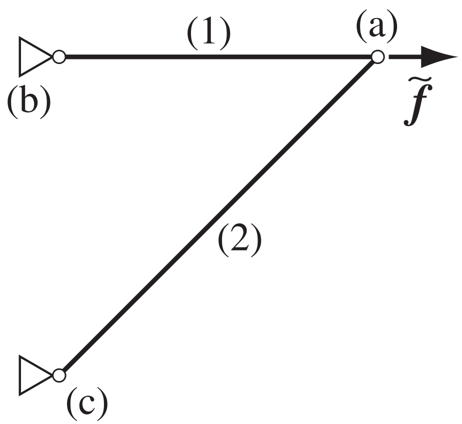


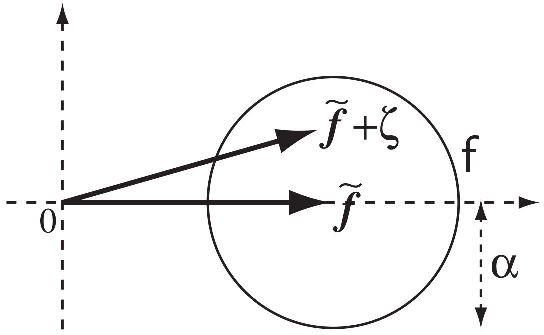
不確定性

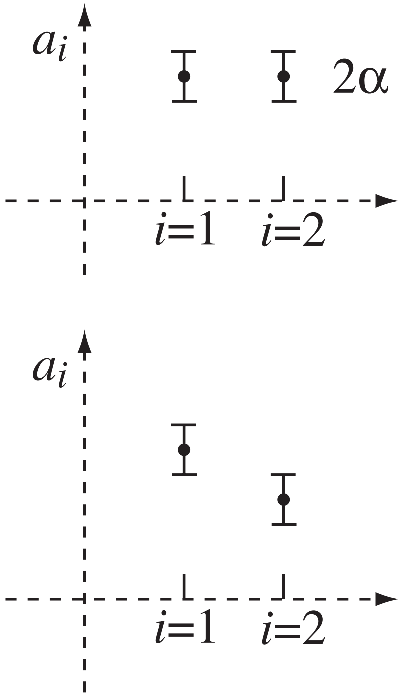
- 確率論的
  - 信頼性設計
- 非確率論的
  - unknown-but-bounded

不確定性

- 確率論的
  - 信頼性設計
- 非確率論的
  - unknown-but-bounded







不確定性

- 確率論的
  - 信頼性設計
- 非確率論的
  - unknown-but-bounded
  - convex model [Ben-Haim & Elishakoff 90]
    - トラスのロバスト最適設計 [Pantelides & Ganzerli 98]
  - ロバスト LP, QP [Ben-Tal & Nemirovski 02]
    - トラスのロバスト最適設計 [Ben-Tal & Nemirovski 97]
  - 感度係数のノルム最小化
    - [Hang & Kwak 04], [曽我部 02]
  - ロバストネス関数 [Ben-Haim 01]
    - ロバスト性の定量的な指標

釣合式

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \mathbf{f}$$

不確定な外力:

$$\mathbf{f} = \widetilde{f} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

$\widetilde{\boldsymbol{f}}$	**公称値 (平均値)**
ζ	**不確定** (unknown-but-bounded)
$\alpha \geq 0$	**不確定性の ‘大きさ’**

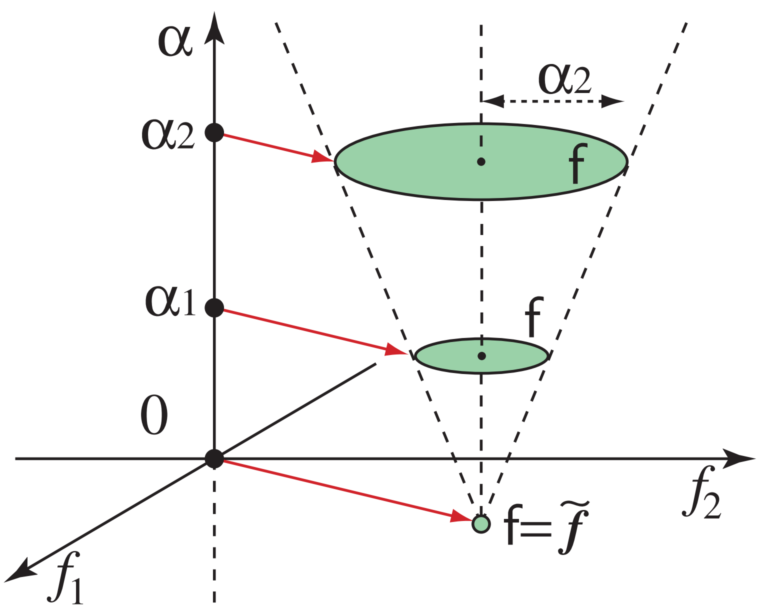
釣合式

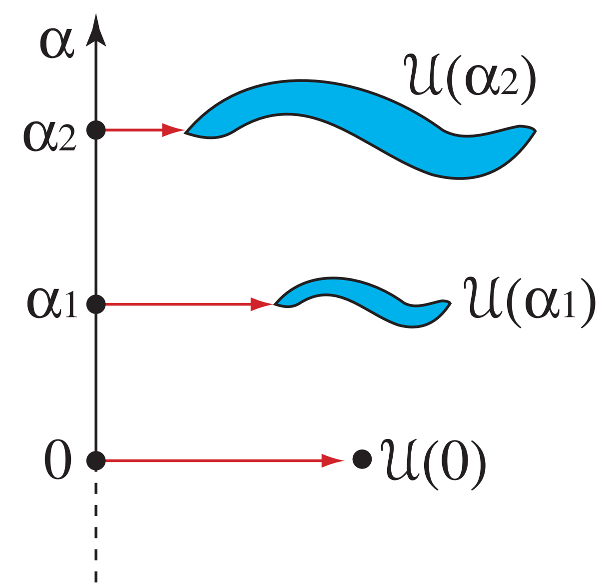
$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \mathsf{f}$$

不確定な外力:

$$\mathsf{f} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

- **釣合式の解 $\boldsymbol{u}$ の集合** $\longrightarrow \mathcal{U}(\alpha)$





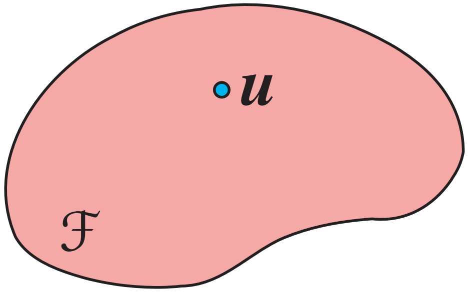
制約条件

通常の制約

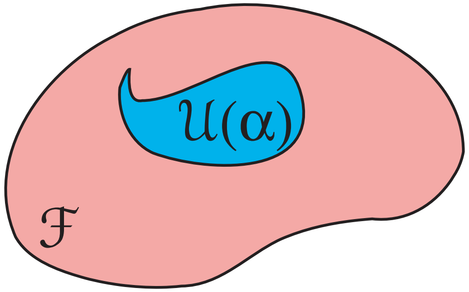
$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{u}\text{は釣合式の解}$$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}$



$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$

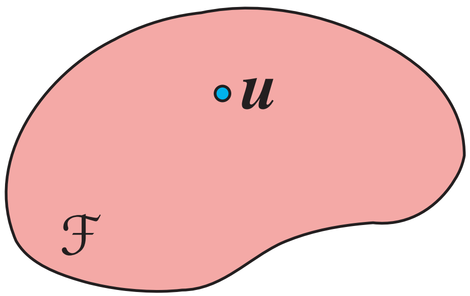
制約条件

通常の制約

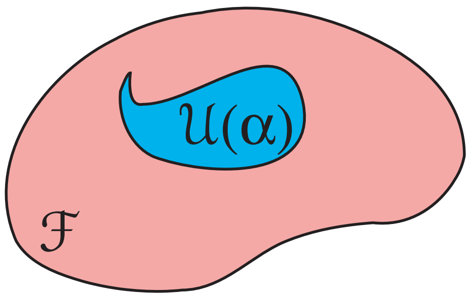
$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{u}\text{は釣合式の解}$$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}$



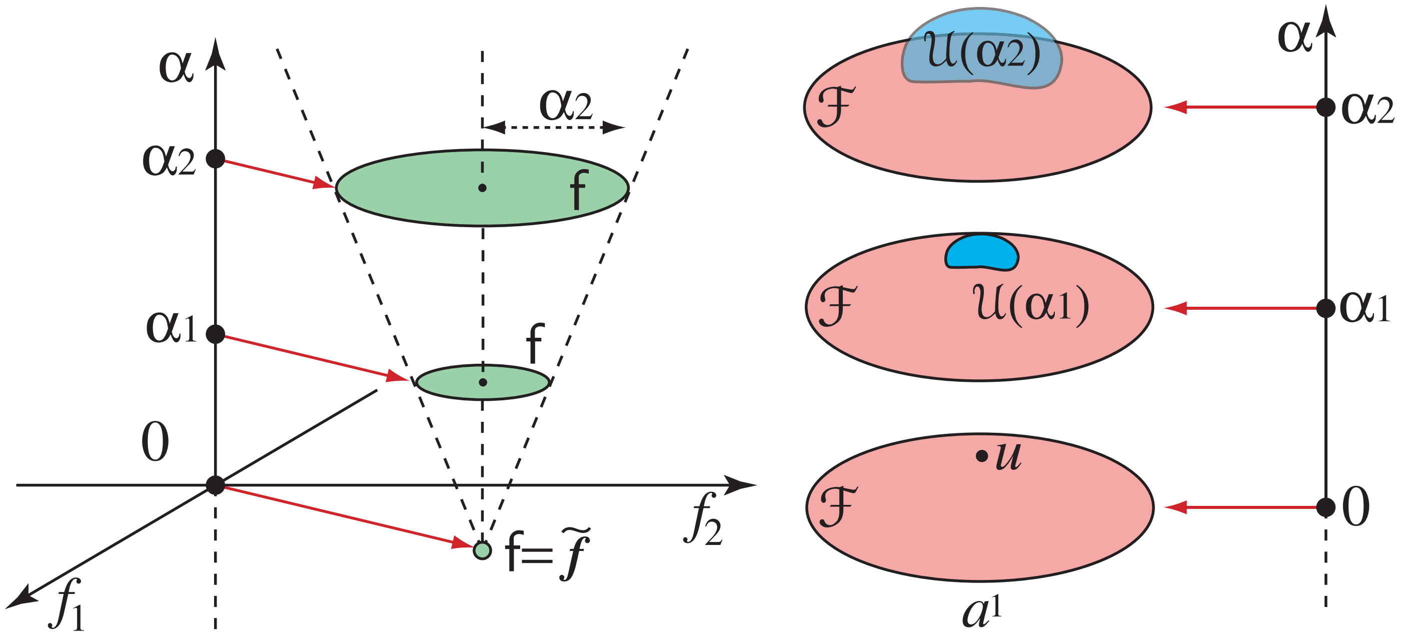
$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$

- **全ての** $\zeta, \alpha \geq \|\zeta\|$ **に対して制約を** check **する**
    - ζ **は連続値** $\Longrightarrow$ **無限個の制約**

ロバストネス関数 $\hat{\alpha}$

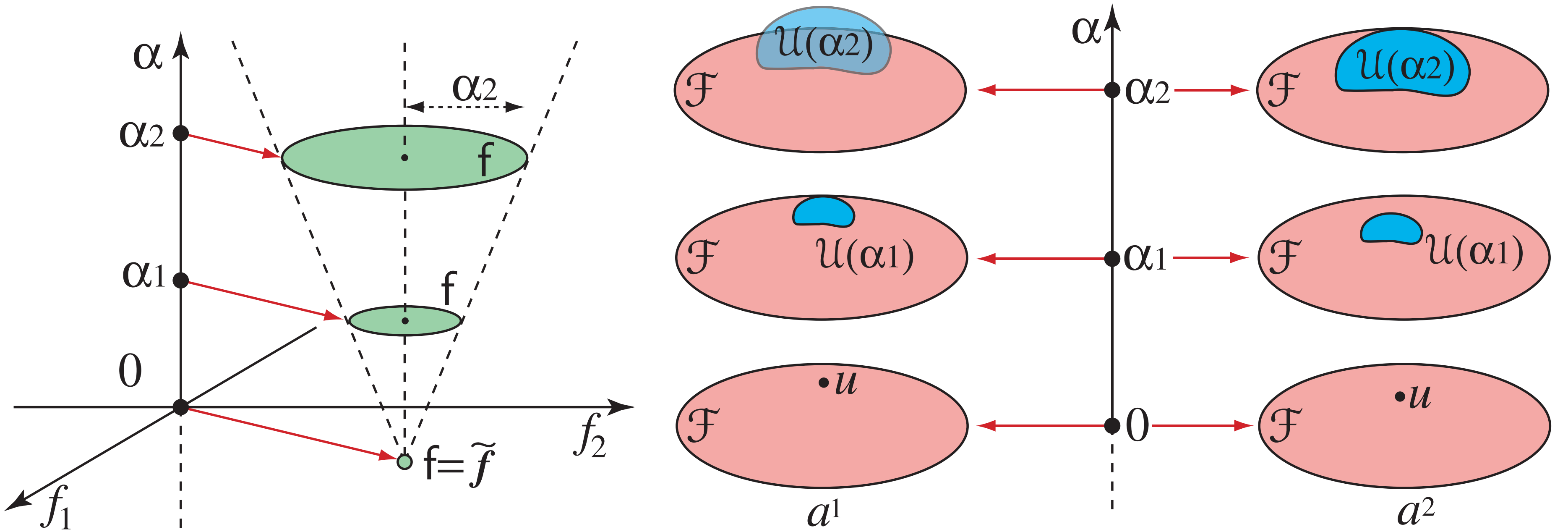
ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$

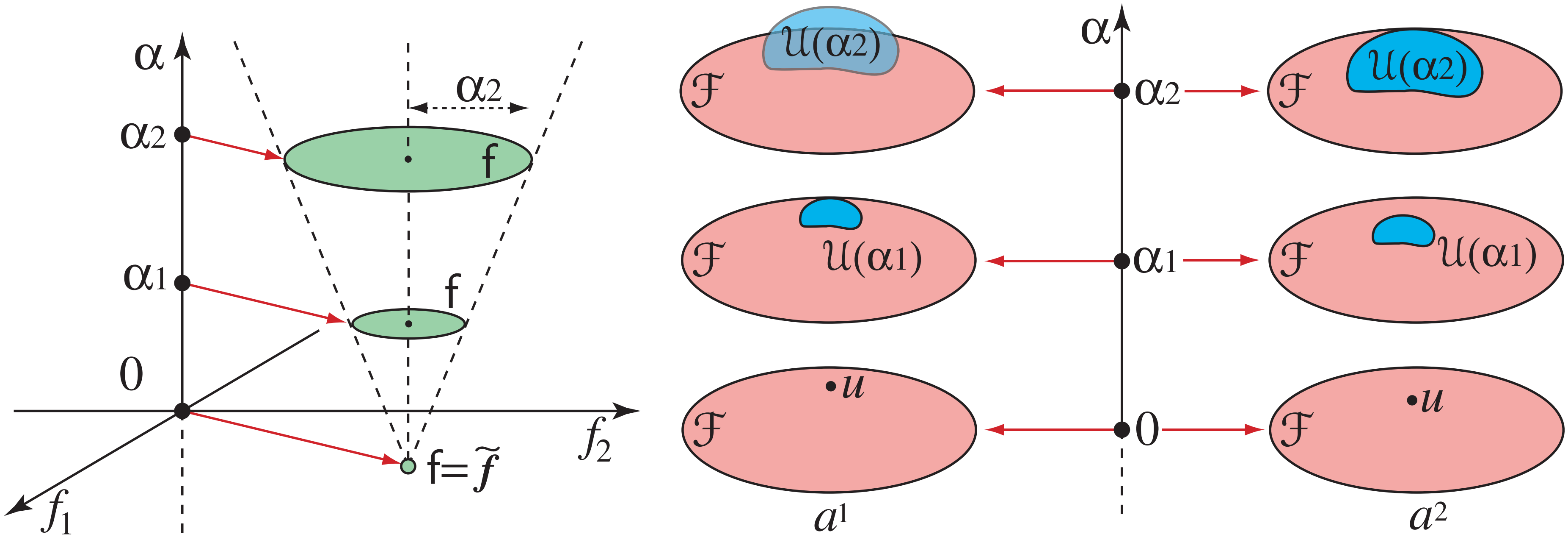


$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^1) = \alpha_1$ $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^2) = \alpha_2$

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^1) = \alpha_1$ $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^2) = \alpha_2$

- $\widehat{\alpha}$ = **性能制約 $\mathcal{F}$ が必ず満たされる α の最大値**
- $\widehat{\alpha} = \max\{\alpha : \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}\}$

ロバストネス関数

- info-gap decision theory [Ben-Haim 01]
- 設計変数 a の関数 — $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})$
- ロバスト性の定量的な指標の 1 つ
  - $\widehat{\alpha}$ が大きい $\Longrightarrow$ ロバスト性が大きい
  - 許容できるばらつきの '幅' を表す
- 不確定なパラメータの分布の情報が不要
- 構造物の性能制約に対する保証を与える
  - ばらつきの '幅' が $\widehat{\alpha}$ 以下 $\Longrightarrow$ 制約を必ず満たす

問題の設定

制約条件 — $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{0}\}$$

$$g_i(\boldsymbol{u}) \quad \leftarrow \quad \boldsymbol{u}\ \textbf{の多項式}$$

釣合式の解の集合 — $\mathcal{U}(\alpha)$

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|,$$

ロバストネス関数 — $\widehat{\alpha}$

$$\widehat{\alpha} = \max\{\alpha : \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}\}$$

Quadratic embedding

制約条件

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \le \boldsymbol{0}\}$$

$$g_i(\boldsymbol{u}) \quad \leftarrow \quad \boldsymbol{u}\text{ の多項式}$$

2 次形式 ($Q_l \in \mathcal{S}^{n+1}$)

$$\mathcal{F} = \left\{ \boldsymbol{u} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix}^{\top} \boldsymbol{Q}_l \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix} \ge 0,\ l = 1, \ldots, n^{\mathrm{c}} \right\}$$

- “(多項式) ≤ 0” は有限個の 2 次不等式で表現できる

Quadratic embedding

釣合式の解の集合

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

$$\alpha \geq \|\zeta\| \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 \geq \zeta^\top \zeta$$

2 次形式 ($\boldsymbol{\Omega}(\alpha) \in \mathcal{S}^{n+1}$)

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ \boldsymbol{u} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix}^\top \boldsymbol{\Omega}(\alpha) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

- α を固定
  $\rightarrow$ 2 次不等式で表現できる

$\mathcal{S}$-procedure + homogenization

2 次不等式で表される領域

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}^\top \boldsymbol{P}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}, \quad \boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{P}_1 \in \mathcal{S}^{n+1}$$

定理

$$\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \tau \geq 0, \quad \boldsymbol{P}_0 - \tau \boldsymbol{P}_1 \succeq \boldsymbol{O}$$

SDPへの変換

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$ を求める問題

$$\widehat{\alpha} = \max\left\{\alpha : \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{S}$-procedure

$$\Downarrow$$

SDP 問題

$$\boxed{\widehat{\alpha}^2 = \max\left\{t : \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{\rho}) \succeq \boldsymbol{O},\ \ \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}\right\}}$$

半正定値計画法 (SDP)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{C} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i y_i \succeq \boldsymbol{O}
\end{aligned}
$$

変数： $y_1, \ldots, y_m$

定数： $b_1, \ldots, b_m,$

$\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m,\ \boldsymbol{C} \in \mathcal{S}^n \quad \leftarrow n \times n$ **対称行列**

- $P \succeq O \quad \Longleftrightarrow \quad P$ **が半正定値**

  $\leftarrow$ **非線形, 凸な制約**

半正定値計画法

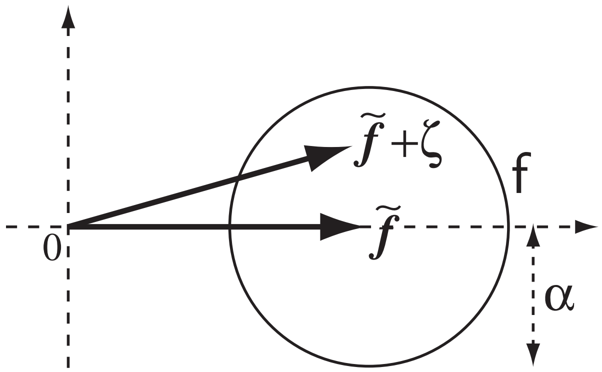
- semidefinite program, SDP
- 数理計画法の 1 つ
  - 凸, 非線形
  - 線形計画, 凸 2 次計画などを含む
- 主双対内点法 [Kojima *et al.* 97], [Alizadeh 98], etc.
  - 問題のサイズの多項式時間で最適解が得られる
  - 実用的で高速なソフトウェア

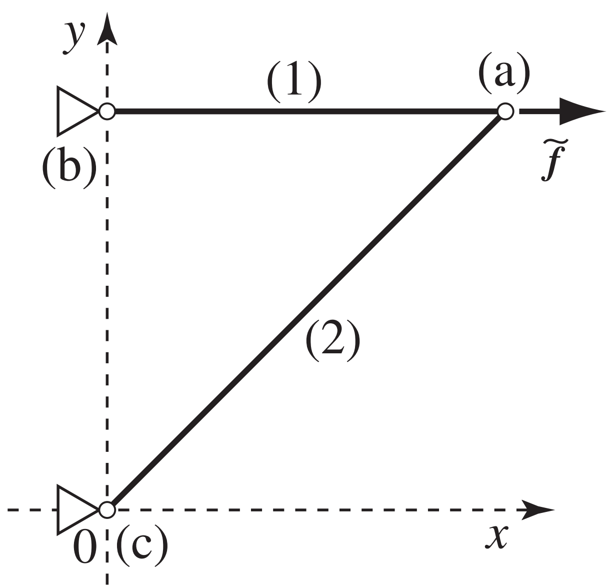
半正定値計画法

- semidefinite program, SDP
- 応用
  - トラスの固有振動数最適化 [Ohsaki *et al.* 99]
  - 組合せ最適化 [Goemans & Williamson 95]
  - サポートベクターマシン [Lanckriet *et al.* 04]
  - 非凸計画問題の緩和 [Kojima & Tunçel 00], [Lassere 02]
  - システムと制御 [Boyd *et al.* 94]
  - ロバスト線形計画問題 [Ben-Tal & Nemirovski 02]
  - 係数が不確定な線形方程式の解集合を求める問題 [Calafiore & El Ghaoui 04]

例題 (2 部材トラス)

- 外力：中心が $\widetilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約

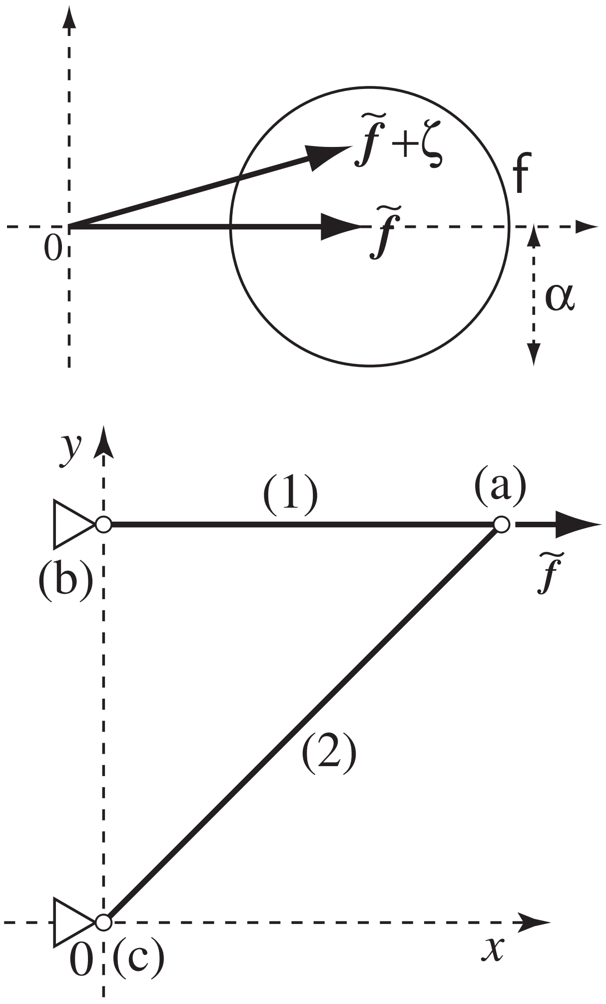


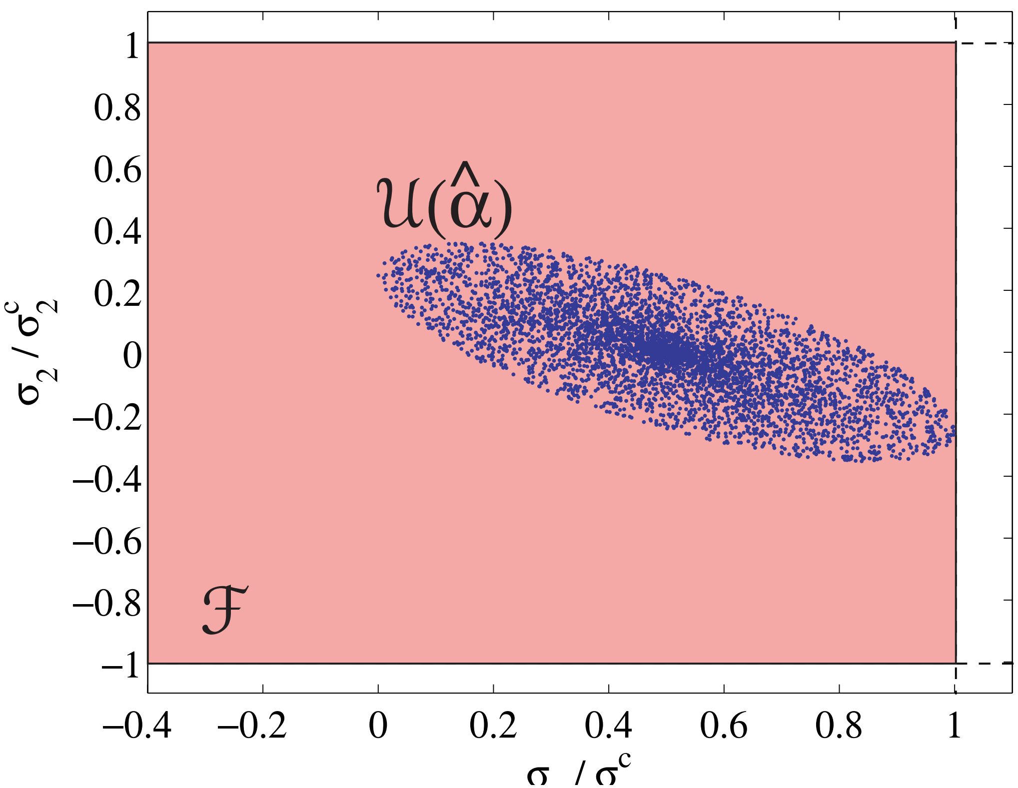


$$\widehat{\alpha} = 69.297 \text{ kN}$$

例題 (2 部材トラス)

- 外力：中心が $\tilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約





応力分布

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$ の最大化

- $\widehat{\alpha}$ は断面積 a の関数

$$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})^2 = \max_{t,\boldsymbol{\rho}}\{t : \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, t, \boldsymbol{\rho}) \succeq \boldsymbol{O},\ \ \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}\}$$

MAX-$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})$

$$\max_{\boldsymbol{a}}\left\{\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0},\ V(\boldsymbol{a}) \leq \overline{V}\right\}$$

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$ の最大化

- $\widehat{\alpha}$ は断面積 a の関数

$$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})^2 = \max_{t,\boldsymbol{\rho}}\{t : \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},t,\boldsymbol{\rho}) \succeq \boldsymbol{O},\ \ \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}\}$$

MAX-$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})$

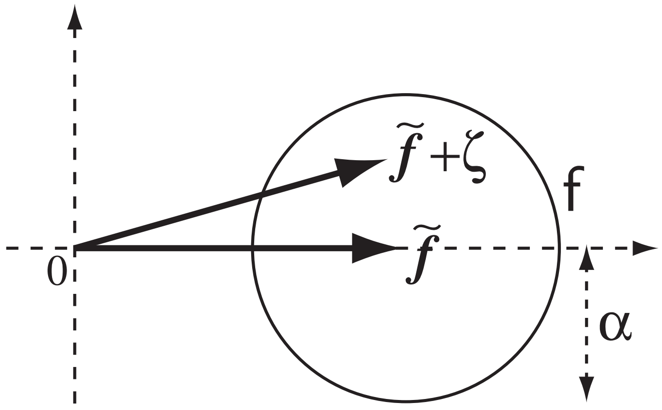
$$\max_{\boldsymbol{a}}\{\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0},\ V(\boldsymbol{a}) \leq \overline{V}\}$$

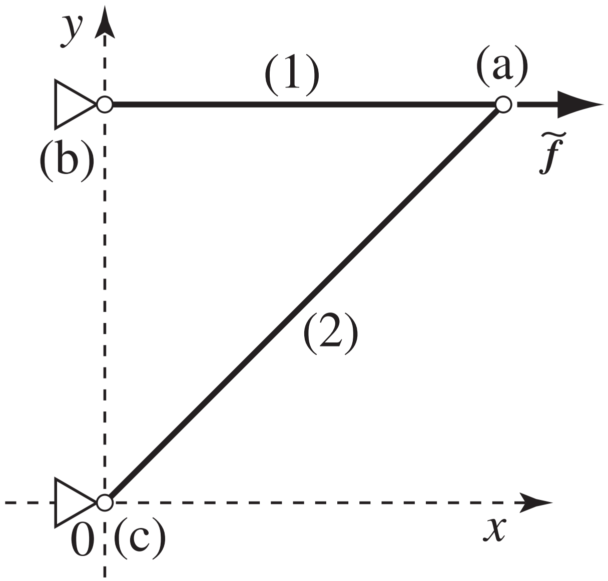
非線形 SDP 問題

$$\max_{\boldsymbol{a},t,\boldsymbol{\rho}}\left\{t\ :\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},t,\boldsymbol{\rho}) \succeq \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0},\ V(\boldsymbol{a}) \leq \overline{V}\right\} \quad \text{(NL-SDP)}$$

2部材トラス

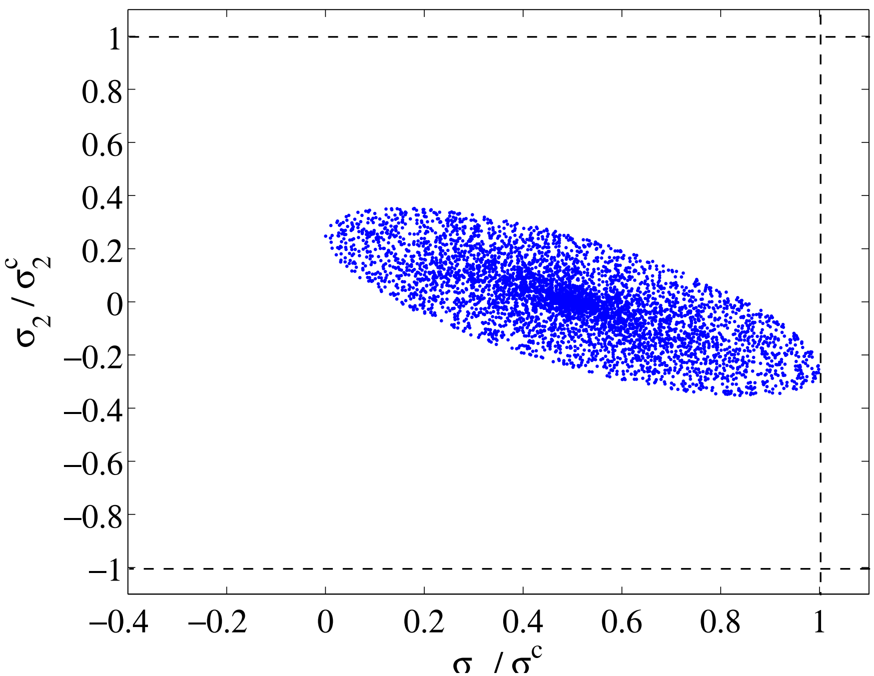
- 主双対内点法
  - SeDuMi 1.05 / Matlab 6.5.1
- 外力：中心が $\tilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約



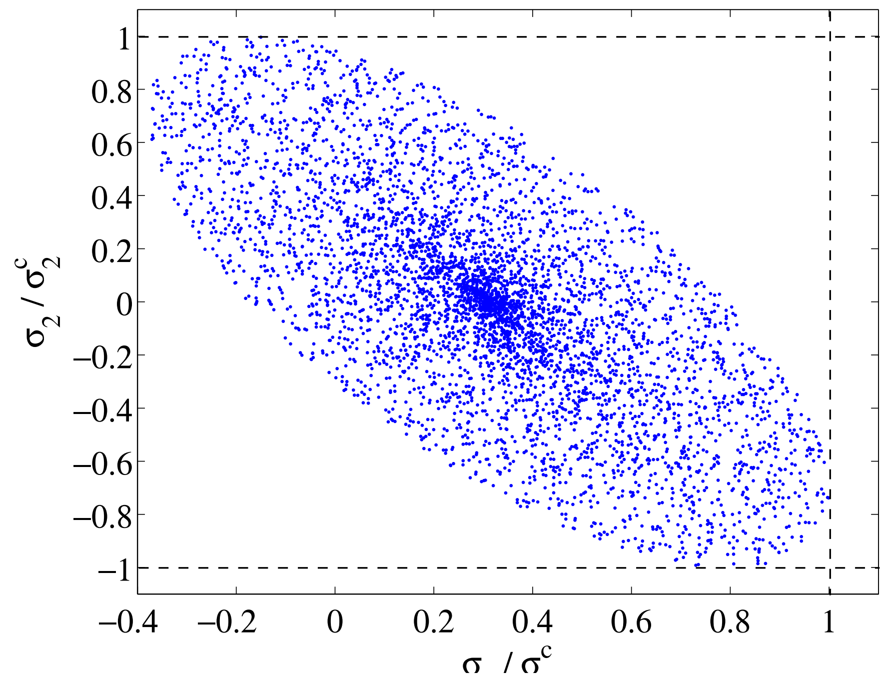


2部材トラス

- ランダムに生成した外力に対する応力
- 最適解
  $\rightarrow$ 双方の部材の応力制約がアクティヴになり得る

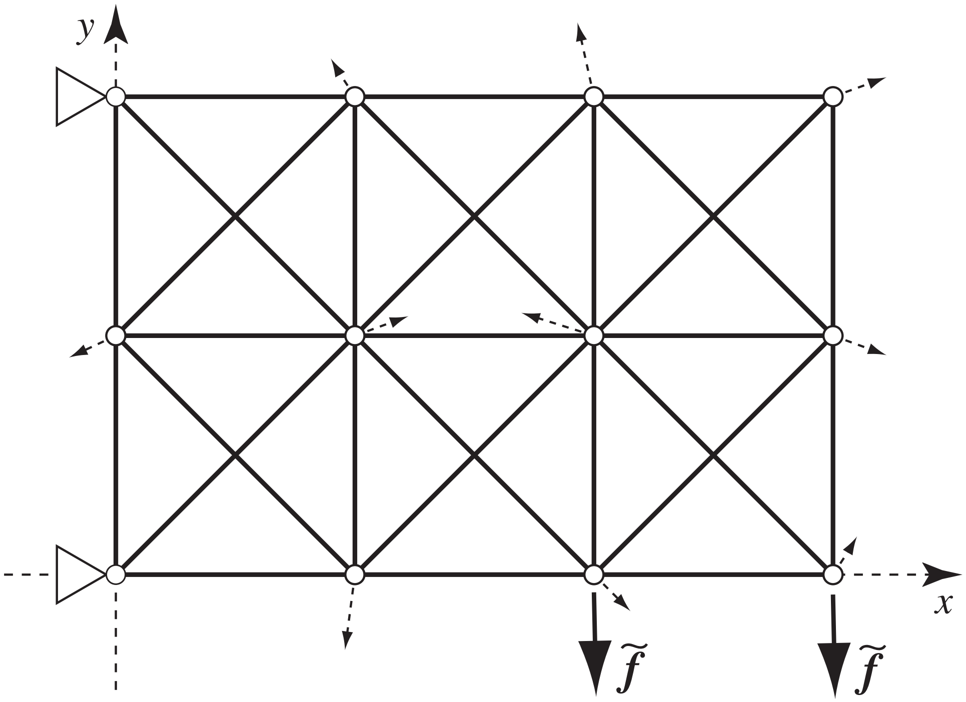


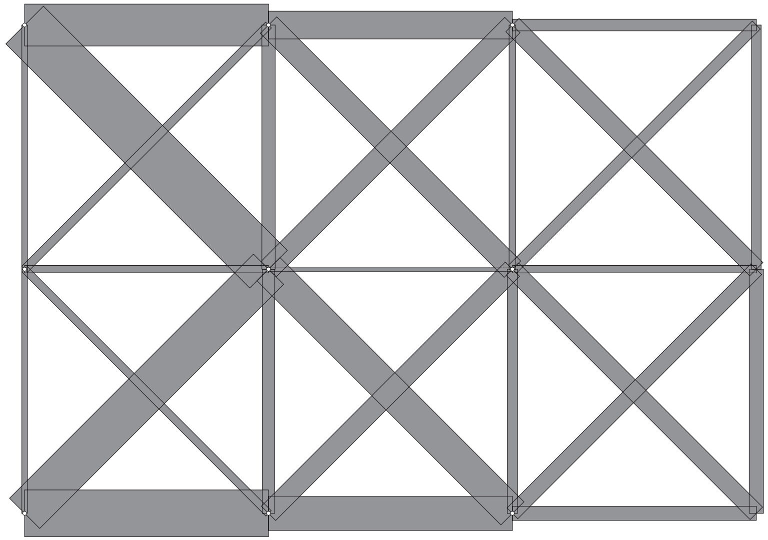
$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 69.3$ kN **(初期解)**



$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 153.8$ kN **(最適解)**

29部材トラス

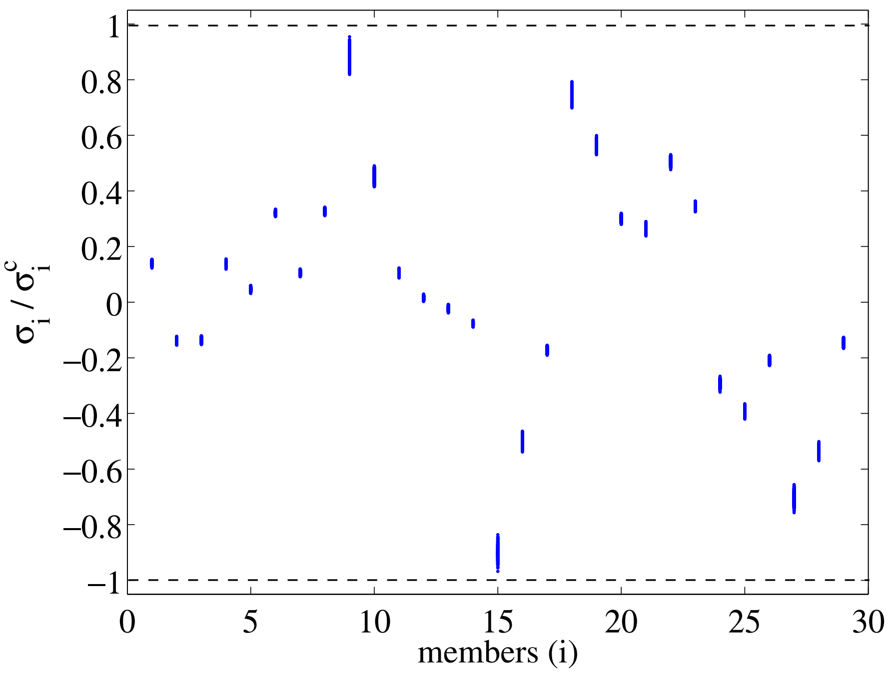


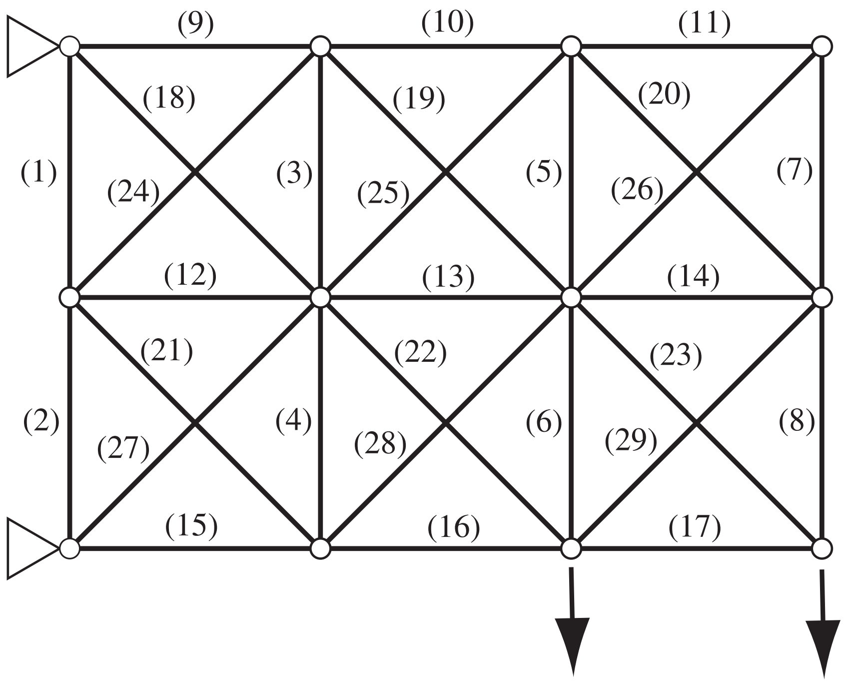


最適解 a^*

- すべての節点に不確定な外力が作用
- 応力制約 $|\sigma_i| \leq \sigma_i^{\mathrm{c}}$

29部材トラス

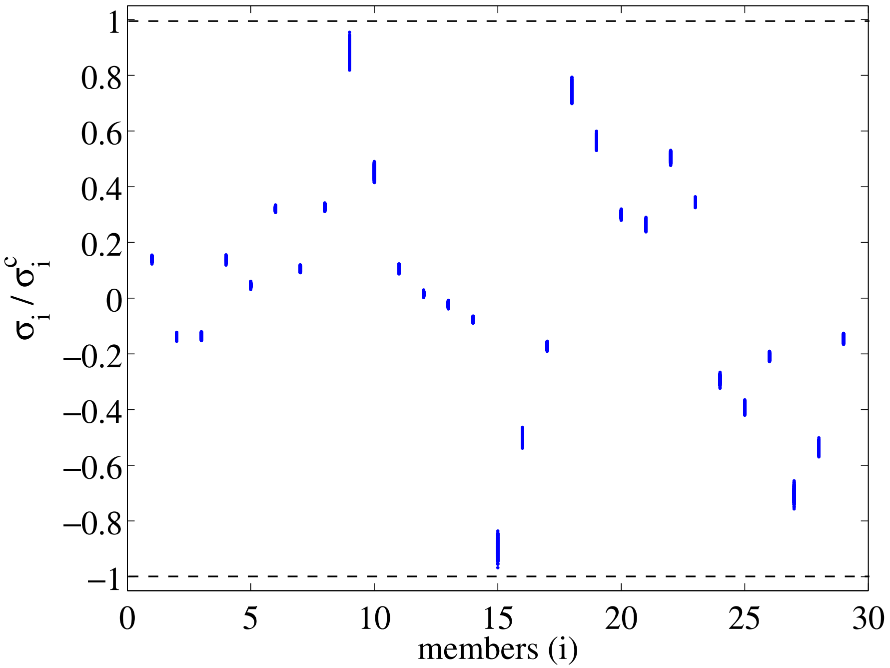




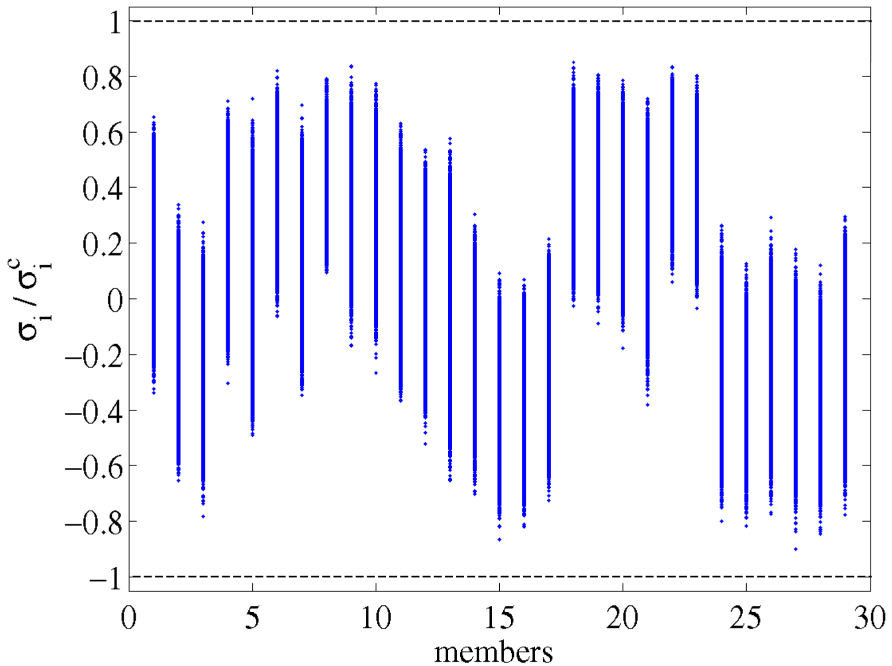
初期解 $\boldsymbol{a}^0$

- すべての節点に不確定な外力が作用
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 0.72\ \mathrm{kN}$
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 10.85\ \mathrm{kN}$

29 部材トラス



初期解 a^0



最適解 a^*

- すべての節点に不確定な外力が作用
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 0.72\ \mathrm{kN}$
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 10.85\ \mathrm{kN}$

結論

- ロバストネス関数
  - ロバスト性の定量的な指標
  - 不確定な外力の作用するトラス
  - 無限個の制約条件
  - 2 次不等式への埋め込み $+$ $\mathcal{S}$-procedure
  - SDP 問題へ帰着
- ロバストネス関数最大化問題
  - 非線形 SDP
  - 逐次 SDP 法
  - 主双対内点法を用いて SDP を繰り返し解く